

# FORMAS, TENSIONES Y DEFORMACIONES EN ESTRUCTURAS LAMINARES CON PUNTOS SINGULARES (\*)

(FORMS, STRAINS AND DEFORMATIONS IN LAMINAR STRUCTURES WITH PECULIAR POINTS)

Rafael Cortell Bataller  
E.T.S.I.C.C.P.; U.P.V.

(445-15)

Director de la Tesis:

José Soler Sanza  
Catedrático de Cálculo de Estructuras  
E.T.S.I.C.C.P.; U.P.V.

## RESUMEN

*La Memoria-Tesis reseñada pretende ser una contribución al conocimiento del problema consistente en la búsqueda de formas laminares que contengan los bordes de un rectángulo plano y sean estructuralmente aptas para resistir cargas puntuales o concentradas.*

## SUMMARY

*The Record-Thesis reported intends to be a contribution to the acknowledgement of the problem consisting in the search of laminar shapes which would contain the edges of a plane rectangle and would be structurally apt to resist punctual or concentrated loads.*

## La búsqueda de formas

La original idea que llevó a la concepción de la superficie conocida como «lámina Pucher de doble curvatura» consiste en que al sujetar una membrana elástica en los bordes de un rectángulo y aplicarle una presión interna, se obtiene una superficie que, al menos en teoría, trabajará a compresión cuando se construya rígida e invertida.

Posteriormente, I. Canals y P. Ballesteros, entre otros, estudian y proponen una superficie a la que denominan *velaria* y *velaria paraboloidal*, respectivamente, tal como la representada en la Figura 1 y que es similar a la obtenida de manera experimental.

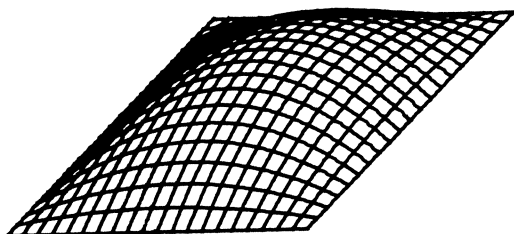


Fig. 1.—Velaria paraboloidal. Parámetros:  $A = B = 2$ ;  $C = 1$ ;  $\tan \alpha = -1$ .

Desaparecen así los tímpanos o nervios de rigidez que habría que utilizar con superficies de revolución para cubrir un rectángulo.

Esta superficie presenta puntos singulares en los vértices de la planta. En ellos, las tangentes a la superficie no se encuentran en un plano tangente, sino sobre un cono tangente. Llamando  $C$  a la altura máxima, la ecuación de dicha superficie referida al centro del rectángulo de dimensiones  $2A \times 2B$  como origen de coordenadas será:

$$z(x,y) = C \cdot [1 - (x/A)^2] \cdot [1 - (y/B)^2] \quad [1]$$

Pues bien, sometiendo a esa misma membrana flexible, no a una presión interna, sino a una fuerza puntual ortogonal a su plano, es decir, tirando de un punto de la misma en esa dirección, se obtendrá otra superficie que, siendo rígida, podrá soportar en compresión y al menos en teoría, la anterior carga invertida.

Por tanto, habrá que obtener ecuaciones analíticas de superficies que conteniendo a los bordes de un rectángulo posean un punto singular sobre el mismo y no presenten aristas generadas desde dicho punto hasta los bordes del rectángulo que contienen.

El objetivo de este trabajo es, pues, la búsqueda de nuevas formas resistentes que guarden cierta semejanza con las obtenidas experimentalmente, así como su cálculo.

\* Tesis presentada el 7 de junio de 1983 en la E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Valencia, leída el 28 de junio del mismo año. Obtuvo la calificación de sobresaliente cum laude.

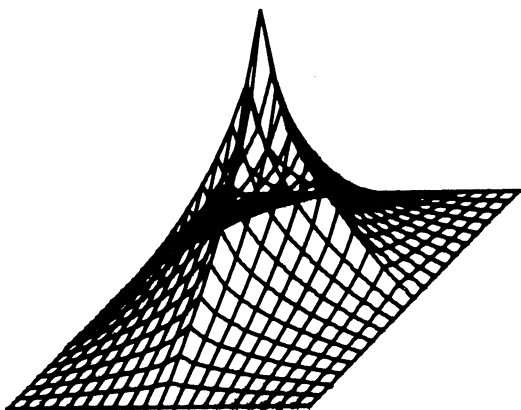


Fig. 2.—Superficie singular astroídica.

Las características geométricas citadas impuestas a priori nos llevaron a obtener una serie de superficies producto que, si bien todas ellas contenían a los bordes de un rectángulo plano horizontal, no cumplían algunas de las restricciones restantes. A título de ejemplo citaremos la *superficie producto obtenida mediante astroides*, representada en la Figura 2.

Esta superficie de doble curvatura contiene a un rectángulo de lados  $2A \times 2B$  con un punto singular sobre el mismo, pero con aristas que van desde dicho punto hasta los puntos medios del borde de la

planta. Sus intersecciones con los planos coordenados son curvas formadas por tramos de astroides con un punto de retroceso de segunda clase.

Se vio, pues, que generando superficies producto era incompatible la existencia del punto singular con la no existencia de aristas.

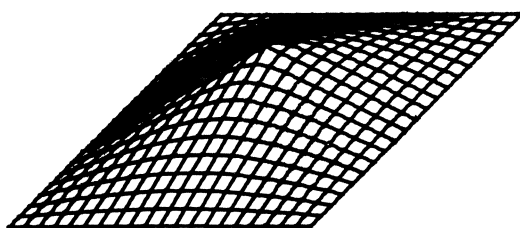
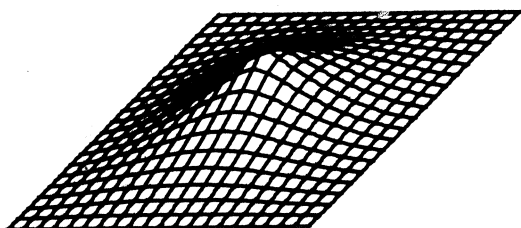
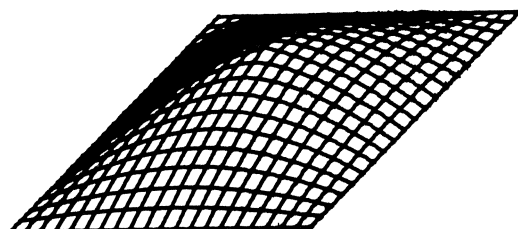
Mediante un estudio geométrico riguroso del problema planteado se han podido generar superficies singulares que cumplan todos los requisitos impuestos.

El procedimiento consiste en provocar una deformación sobre la superficie *velaria paraboloidal* tal que le produzca el punto singular.

Así pues, se propone y justifica una nueva superficie de doble curvatura definiéndola como *velaria singular parabólica* representada en las Figuras 3, 4 y 5.

Llamando  $C$  a la altura máxima, la ecuación de dicha superficie referida al centro del rectángulo de dimensiones  $2A \times 2B$  como origen de coordenadas es:

$$z(x,y) = (B \operatorname{tg} \alpha + C) \cdot \left[ (x/A)^2 + (y/B)^2 - (xy/AB)^2 \right] - (B \operatorname{tg} \alpha + 2C) \cdot \sqrt{(x/A)^2 + (y/B)^2 - (xy/AB)^2} + C; \quad -2C/B \leq \operatorname{tg} \alpha < 0 \quad [2]$$

Fig. 3.—Velaria singular parabólica. Parámetros:  $A = B = 2$ ;  $C = 1$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -0,5$ .Fig. 4.—Velaria singular parabólica. Parámetros:  $A = B = 2$ ;  $C = 1$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -0,15$ .Fig. 5.—Velaria singular parabólica. Parámetros:  $A = B = 2$ ;  $C = 1$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -0,75$ .

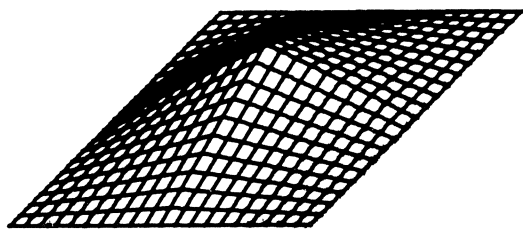


Fig. 6.—Mosaico de cuatro porciones de paraboloides hiperbólicos usados como cimentación.

El parámetro  $\operatorname{tg} \alpha$  es la primera derivada en el punto  $(0, B, 0)$  de la curva obtenida como intersección de la superficie [2] con el plano  $x = 0$ . Dicha intersección es una parábola.

Por otro lado, si en la ecuación [2] hacemos

$$\operatorname{tg} \alpha = -2C/B \quad [3]$$

dicha ecuación queda reducida a la [1], que es la de la velaria paraboloidal. Por tanto, ésta es una superficie particular incluida en la familia de superficies singulares representadas por la ecuación [2].

Es ampliamente conocida la realización de pruebas de carga con resultados satisfactorios para el paraboloides hiperbólico cubriendo un rectángulo plano como se indica en la Figura 6 y sometido a una carga puntual en la cúspide.

Las cuatro aristas rectas que aparecen desde la cúspide hasta los puntos medios del rectángulo base han de ser rigidizadas debido a la concentración de esfuerzos que aparece sobre las mismas. Con la nueva superficie propuesta (Figura 3) se eliminan estas aristas.

Para la familia de superficies singulares estudiada, y atendiendo al carácter de dichas superficies en su dominio de definición, diremos que:

— Existe una subfamilia de superficies singulares cuyos puntos son hiperbólicos en unas zonas y elípticos en otras, separadas por líneas de puntos parabólicos, siendo en ellas  $|\operatorname{tg} \alpha| > C/B$  (Figuras 1 y 5). La velaria paraboloidal está incluida en ellas, ya que para esta superficie es  $\operatorname{tg} \alpha = -2C/B$ .

— Existe una subfamilia de superficies singulares cuyos puntos son todos hiperbólicos a excepción de los cuatro obtenidos como intersección de los ejes  $OX$ ,  $OY$  con el rectángulo propio que son parabólicos, siendo en ellas  $|\operatorname{tg} \alpha| < C/B$ . (Figura 4.)

— Existe una superficie singular frontera entre las dos subfamilias anteriores, cuyos puntos son todos hiperbólicos a excepción de los situados sobre los ejes coordenados que son parabólicos, siendo en ellas  $\operatorname{tg} \alpha = C/B$ . (Figura 3.)

Asimismo, se demuestra en el presente trabajo que para cada velaria paraboloidal existe una velaria

singular parabólica con coincidencia de planos tangentes y de curvaturas principales en el rectángulo base de ambas superficies, de manera que una, acoplada con la otra invertida, permitirían cubrir una determinada superficie asegurando una perfecta transición de una forma a la otra y evitando de ese modo la existencia de aristas en los bordes, siempre desfavorables desde el punto de vista de la concentración de esfuerzos. A su vez, existen dos haces de rectas ortogonales contenidas en la superficie resultante y en un plano. En estas direcciones se podría pretensar la estructura total obtenida como resultado de la composición antedicha.

El procedimiento geométrico utilizado para generar las superficies singulares tratadas puede generalizarse utilizando polinomios de grado  $n$  como curvas generatrices. Se obtiene así la *superficie velaria singular de grado  $n$* , cuya ecuación, a falta de determinar los  $n$  coeficientes constantes  $K_i$ , sería

$$z(x, y) = C + \sum_{i=1}^n K_i$$

$$[(x/A)^2 + (y/B)^2 - (xy/AB)^2]^{1/2} \quad [4]$$

siendo  $C$  la altura máxima sobre  $XOY$ . Para cada valor de  $n$  obtenemos una familia de superficies singulares distinta. Los valores de  $K_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , serán tales que hagan a cada superficie contener el rectángulo base de lados  $2A$  y  $2B$ . Efectivamente, si en [4] hacemos  $n = 2$ , obtendremos la ecuación [2] en donde los valores

$$\begin{aligned} K_1 &= -(B \operatorname{tg} \alpha + 2C) \\ K_2 &= B \operatorname{tg} \alpha + C \end{aligned} \quad [5]$$

hacen que se cumpla la condición antes señalada. El caso  $n = 3$  se estudia también, pero desde un punto de vista exclusivamente geométrico.

### El método de cálculo

En lo que respecta a la determinación de los esfuerzos en este tipo de superficies singulares, la abordamos desde la hipótesis de membrana.

Esto es tanto como suponer que las tensiones de flexión en cualquier punto son despreciables frente a las producidas por los esfuerzos normales y tangenciales en el plano tangente a la lámina.

El sistema de ecuaciones diferenciales de equilibrio de una lámina como membrana queda reducido, mediante la introducción de una función de fuerzas  $F$ , a la siguiente ecuación diferencial lineal

en derivadas parciales de segundo orden con coeficientes variables,

$$T \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + R \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\zeta \quad [6]$$

en donde  $\zeta(x,y)$  es la carga vertical aplicada, siendo además

$$T(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad S(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad R(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad [7]$$

$z = z(x,y)$  la ecuación de la superficie media de la lámina.

Conocida la función  $z = z(x,y)$  y las condiciones en los bordes de la lámina, la ecuación [6] nos permite conocer  $F(x,y)$  para después, y solamente para carga vertical, calcular los esfuerzos proyectados por unidad de longitud proyectada sobre XOY, a partir de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} N'_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ N'_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ N'_{xy} &= - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad [8]$$

A partir de los esfuerzos proyectados obtendremos fácilmente por consideraciones geométricas los esfuerzos reales en la lámina.

La integración de la ecuación [6] se realiza, por un lado, utilizando el *método de las características* para aquellas superficies cuya ecuación diferencial es de tipo hiperbólico (programa HIPER-2), y por otra parte y con carácter general, utilizando el *método de diferencias finitas* (programa FINT).

El programa FINT permite analizar una superficie laminar singular parabólica simétrica respecto de los dos ejes y apoyada sobre su rectángulo base con carga vertical. Determina los esfuerzos de membrana proyectados y reales, tensiones en kg/cm<sup>2</sup> y deformaciones unitarias en los nudos de la malla, además de comprobar en cada caso el equilibrio global de la estructura sometida a carga vertical. Esto

se obtiene comparando la resultante vertical de los esfuerzos en los bordes obtenida mediante integración aproximada por Simpson, con la sollicitación aplicada.

Se prevé la posibilidad de tres funciones distintas para los valores de la función de fuerza en los bordes, así como cuatro casos diferentes de carga vertical.

## Resultados y conclusiones

A través del programa FINT se han estudiado profusamente las superficies singulares del tipo de las presentadas en las Figuras 3, 4 y 5. De cada uno de estos estudios se desprende un análisis de la sensibilidad de los parámetros geométricos que intervienen en la forma de la lámina. De ese modo, para una carga puntual en cúspide a resistir y unas dimensiones en planta prefijadas, se determina la forma óptima desde un punto de vista tensional.

De las conclusiones reflejadas en la tesis conviene destacar las siguientes:

— Obtención de la ecuación de una superficie de doble curvatura denominada «velaria singular parabólica simétrica», que incluye como caso particular la de la velaria paraboloidal.

— Posibilidad de obtener, mediante la generalización propuesta para las superficies singulares de orden «n», familias de superficies singulares con una variedad de forma doblemente infinita.

— Posibilidad de estudiar para cada familia de superficies singulares su comportamiento resistente mediante variaciones incrementales en la forma de la lámina.

— Posibilidad de calcular invertidas estas superficies con una singularidad puntual, o bien parte de ellas eliminando la cúspide.

— La superficie *velaria singular parabólica simétrica* en el punto impropio tiende a ser un cono de revolución (planta cuadrada) o elíptico (planta rectangular). Por ello, el estudio del entorno de la cúspide (punto singular) es sustituible por el del correspondiente cono.

